

# UMA NOVA ABORDAGEM AO PROBLEMA DA CONSTRUÇÃO DE UMA FUNÇÃO DE VALOR CARDINAL: MACBETH

**Carlos A. Bana e Costa**

Instituto Superior Técnico,  
Dep. Eng. Civil / CESUR  
Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa

**Jean-Claude Vansnick**

Université de Mons-Hainaut  
F.S.E.S., Place du parc, 20  
7000 Mons, Bélgica

## Abstract

Classical techniques for cardinal measurement of values, such as direct rating and bisection, are often criticised in decision and psychology literature, because they require from the evaluators the comparison of two pairs of stimuli or alternatives. To bypass this problem, we conceived *MACBETH* (*Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation TechNique*), a new approach for the quantification of value judgements, in which the evaluator is asked to give an absolute judgement of difference of attractiveness between two actions. To ease the elaboration of such judgements, a semantic scale of six categories of difference of attractiveness is presented to the evaluator. The numerical scale proposed by *MACBETH* is obtained by linear programming, so as an indicator of inconsistency of the set of judgements and suggestions to address eventual inconsistency situations. The theoretical problem behind the conception of *MACBETH* is the one of the numerical representation of multiple semi-orders by constant thresholds. *MACBETH* is a constructive and interactive approach for decision aid, as illustrated with a real application in public decision making.

## Resumo

As principais técnicas de construção de uma função de valor cardinal, como as técnicas de *direct rating* e da “bissecção”, são muitas vezes criticadas na literatura da decisão e da psicologia por se basearem em processos de diálogo analista / avaliador que requerem deste último a elaboração de juízos de valor relativo entre dois pares de estímulos ou acções potenciais. Para ultrapassar as dificuldades inerentes a este tipo de questões, propõe-se neste artigo uma chave original de entrada na modelação cardinal das preferências, *MACBETH* (*Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation TechNique*), que requer do avaliador a elaboração de juízos absolutos de diferença de atractividade entre duas acções. Para facilitar a elaboração destes juízos, recorre-se à utilização de uma escala de categorias semânticas de diferença de atractividade, propostas *a priori* ao avaliador pelo analista. A função-critério construída é obtida por programação linear. O método fornece um indicador de inconsistência do conjunto de juízos formulados e sugestões facilitando a sua eventual revisão. Mostra-se que o problema teórico subjacente é o da representação numérica de semi-ordens múltiplas por limiares constantes e apresentam-se as hipóteses de trabalho subjacentes, as quais não são nem de natureza normativa, nem prescriptiva. *MACBETH* insere-se numa abordagem construtivista de apoio à decisão e a interactividade é uma das suas vantagens fundamentais. Por fim, apresentam-se exemplos de aplicação extraídos de um caso real recente de apoio multicritério à tomada de decisão.

## Keywords

Cardinal value functions, decision aid, interactiveness.

“The ideas which are here expressed so laboriously are extremely simple and should be obvious. The difficulty lies, not in the new ideas, but in escaping from the old ones, which ramify, for those brought up as most of us have been, into every corner of our minds.”

John M. Keynes

## 1. Introdução

Acompanhando a emergência de um novo *paradigma da aprendizagem* em Investigação Operacional e Análise de Sistemas (cf. [Tomlinson e Kiss, 1984], [Rosenhead, 1989], [Bana e Costa, 1993]), a actividade de *estruturação* tem vindo a merecer uma atenção crescente na literatura da decisão. A estruturação de um problema de decisão pode ser um fim, em si mesma, que permita estabelecer uma linguagem de debate e aprendizagem no processo de decisão, descrevendo os *impactos* plausíveis segundo os diversos *pontos de vista* que explicitam os sistemas de valores dos actores intervenientes no processo. Além disso, uma família  $F$  de *pontos de vista fundamentais*,  $F = \{PV_1, \dots, PV_j, \dots, PV_n\}$ , cuja construção é o ponto culminante da *fase de estruturação* num estudo de apoio à decisão, pode, também, servir como base (ponto de partida) para a elaboração de juízos de valor, absoluto ou relativo, sobre acções potenciais (recorde-se que uma *acção potencial* é uma acção real ou fictícia provisoriamente julgada realista [Roy, 1985]). Esta nova fase, *de apoio à avaliação*, passará, se se optar por uma metodologia multicritério (cf. [Bana e Costa, 1990]):

- pela construção para cada ponto de vista fundamental  $PV_j$  de um *modelo de preferências locais (critério)* sobre um conjunto  $A$  de acções potenciais, e
- pela *agregação* dos juízos de valor locais, assim construídos, num *modelo de avaliação global*, tendo em conta certas informações de natureza inter-pontos de vista.

À partida para o desenvolvimento deste artigo, situamo-nos na zona de transição entre as fases de estruturação e de avaliação de um processo de apoio à decisão (ver figura 1) e assumimos que da estruturação são conhecidos os *impactos*  $i_j(a)$  de cada acção  $a$  de  $A$ , eventualmente acompanhados de informações complementares  $\delta_j(a)$  sobre a verosimilhança e ou precisão do(s) nível(is) de impacto que constituem  $i_j(a)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Assumimos, também, a hipótese de independência preferencial, isto é, que a família  $F$  foi construída de tal modo que raciocínios, sobre um ponto de vista fundamental, do tipo "todas as outras coisas iguais" são aceitáveis como hipóteses de trabalho, no quadro de uma abordagem construtiva ao problema da elaboração de um modelo de preferências locais e, depois, globais.

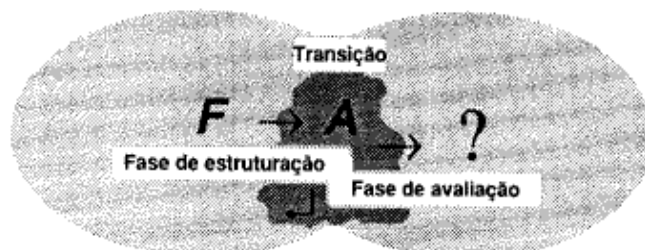


Figura 1 - As duas grandes fases de um estudo de apoio à decisão

Qualquer discussão sobre o tipo de metodologia a seguir na construção de um modelo de preferências globais sobre  $A$  é indissociável do tipo de modelo de preferências locais que se vai associar a cada ponto de vista fundamental  $PV_j$  da família  $F$  - isto é, do tipo de *modelo de juízos de valor* sobre as acções de  $A$ , ou *modelo-critério*. A questão de fundo que se põe à partida para a avaliação local é: *Dados os impactos  $i_j(a)$  e  $i_j(b)$  de duas acções quaisquer de  $A$  sobre um ponto de vista  $PV_j$ , eventualmente acompanhados de indicadores de dispersão  $\delta_j(a)$  e  $\delta_j(b)$ , que "chaves" utilizar para apoiar os actores na avaliação local das acções, em termos relativos ou absolutos, raciocinando todas as outras coisas iguais?* Segundo o tipo de resposta a esta questão, um *critério* ou modelo de juízos de valor associado a um ponto de vista pode revestir múltiplas facetas: um *sistema relacional de preferências* sobre  $A$  (cf. [Roy, 1985, capítulo 7], [Roy e Vincke, 1984]), uma *partição* de  $A$  em categorias, por exemplo, com base num processo de votação (cf. [Brams e Fishburn, 1983]), uma *escala numérica sobre  $A$  quantificando a ideia de valor ou de utilidade* de cada elemento de  $A$  segundo o ponto de vista subjacente (como nas Teorias do Valor ou da Utilidade, cf. [von Winterfeldt e Edwards, 1986], [Keeney e Raiffa, 1976]), uma *escala numérica sobre  $A \times A$  quantificando a ideia de credibilidade* de uma afirmação sobre a preferência relativa entre duas acções de  $A$ , como na Abordagem da Subordinação (*Surclassement*, cf. [Roy, 1985 e 1990]), etc.

Ao escolher-se o tipo de modelo de preferências a associar a cada ponto de vista fundamental, é importante reflectir sobre os problemas de *significação* que se podem pôr, seja em termos de *compreensão* do modelo pelos actores (*significação substantiva*), seja em termos de *significação quantitativa* de condições sobre as diferenças de valor entre duas quaisquer acções<sup>1</sup>. Para evitar, aquando da *agregação*, problemas de falta de significação quantitativa, é sabido que convém construir *escalas numéricas cardinais*, para o que têm sido propostos diversos métodos que se diferenciam pelo tipo de *propriedade* das acções que se quer *medir* e, também, pelo tipo de correspondência que estabelecem entre o conjunto  $\mathfrak{R}$  dos números reais e as características em  $A$  da propriedade a medir, isto é, pelo tipo de *chaves* utilizadas para construir tais escalas.<sup>2</sup>

1 Por significação quantitativa designamos a noção de *meaningfulness* da Teoria da Mensuração (*Measurement Theory*, cf. [Roberts, 1979]). A distinção entre os dois tipos de *significação*, *substantiva* e *quantitativa*, é clara em [French, 1988, pp. 328-329].

2 Recorde-se que, por definição, uma *escala numérica* sobre um conjunto  $X$  é uma função  $v$  de  $X$  em  $\mathfrak{R}$  que faz corresponder a cada elemento  $x$  de  $X$  um número real  $v(x)$ , sendo a distinção de base entre escalas *ordinais* e escalas *cardinais* (cf. [Torgerson, 1958, pp. 14-16]). As *escalas de intervalos* (transformações admissíveis do tipo *lineares positivas*:  $v'(x) = \alpha \cdot v(x) + \beta$ ,  $\alpha > 0$ ) e as *escalas de razões* ou *racios* ("transformações similares":  $v'(x) = \alpha \cdot v(x)$ ,  $\alpha > 0$ ) (cf. [Stevens, 1946]) são *escalas cardinais*, tal como o são as *escalas absolutas* (cf. [Roberts, 1979, p. 64]) (transformação admissível, a *identidade*:  $v'(x) = v(x)$ , a escala é *única*). Já para uma *escala ordinal* é admissível qualquer transformação *monótona estritamente crescente*.

## 2. A noção de diferença de atractividade como base para a construção de critérios de valor cardinais

Neste artigo interessam-nos unicamente os métodos concebidos para ajudar a construir uma *escala de intervalos* sobre  $A$  quantificando a ideia de *valor* (propriedade de *atractividade*) das acções de  $A$  segundo um dado ponto de vista fundamental  $PV_j$ .

O mesmo é dizer que se procura construir uma função-critério  $v(\cdot): A \rightarrow \mathfrak{R}: a \rightarrow v(a)$ <sup>3</sup> tal que, não só o número real  $v(a)$  represente numericamente (seja uma *medida* de) o *valor* de qualquer acção  $a \in A$ , em termos de  $PV_j$ , no sentido (substantivo) em que:

$\forall a, b \in A, v(a) > v(b)$  se e só se para o avaliador  $a$  é mais atractiva (localmente) que  $b$  ( $a P b$ ),

mas também qualquer diferença positiva  $v(a) - v(b)$  represente numericamente a *diferença de valor* entre  $a$  e  $b$ , com  $a P b$  sempre em termos de  $PV_j$ , no sentido (substantivo) em que:

**Condição I:**  $\forall a, b, c, d \in A$  com  $a$  mais atractiva que  $b$  e  $c$  mais atractiva que  $d$ , para o avaliador, o quociente  $[v(a) - v(b)]/[v(c) - v(d)]$  reflecte, em termos relativos, a diferença de atractividade que o avaliador sente (de forma mais ou menos precisa) entre  $a$  e  $b$  tomando como referência a diferença de atractividade entre  $c$  e  $d$ .<sup>4</sup>

Uma tal escala  $v$ , a que chamamos *critério (de valor) cardinal*, satisfaz nomeadamente todas as condições necessárias para definir uma "função de valor mensurável" (*measurable value function*, [Dyer e Sarin, 1979]), no sentido em que  $v$  verifica, em particular, a propriedade:

$\forall a, b, c, d \in A, v(a) - v(b) > v(c) - v(d)$  se e só se "a diferença de atractividade entre  $a$  e  $b$  é maior que a diferença de atractividade entre  $c$  e  $d$ ".

Desde há muito que têm sido propostas numerosas vias para construir uma escala cardinal sobre  $A$ , em trabalhos teóricos e práticos nos domínios da matemática, da economia, das ciências sociais ou da psicologia (em particular, da psicofísica) - ver referências em [Fishburn, 1967], [von Winterfeldt e Edwards, 1986, §7.3], [Farquhar e Keller, 1989]. As mais utilizadas são as técnicas de "bissecção" (em termos de diferenças de preferência) e as técnicas de "pontuação directa" (*direct rating*<sup>5</sup>) (ver descrições simples de ambas em [Goodwin e Wright, 1991, capítulo 2]). O que mais chama a atenção em todos estes métodos de avaliação é a dificuldade do processo de interrogatório que todos seguem, o qual põe problemas complexos

3 Correctamente,  $v_j: A \rightarrow \mathfrak{R}: a \rightarrow v_j(a)$ ; para simplificar, omitiremos o índice  $j$  sempre que tal não gerar confusão.

4 Note-se que a *escala de valor não tem uma origem (um zero) natural* (cf. [von Winterfeldt e Edwards, 1986, p. 231]) - ela não é uma escala de razões.

5 [Guilford, 1954, cap. 11] descreve as técnicas de *direct rating* da psicofísica (ver também [Torgerson, 1958] e outras referências em [Fishburn, 1967, p. 438]). *SMART (Simple MultiAttribute Rating Technique)* de Edwards [1977] é a extensão multicritério do *direct rating* (ver, também, [Edwards e Newman, 1982], [von Winterfeldt e Edwards, 1986], [Edwards et al., 1988], [Buede e Choisser, 1992]).

de operacionalidade da noção de *intensidade de preferência*<sup>6</sup>. Do nosso ponto de vista, o problema reside sobretudo no facto de todos os métodos obrigarem o avaliador, mais ou menos explicitamente, a comparar diferenças de preferência entre dois pares de acções, em associação estrita com o conceito de *intensidade de preferência* introduzido por Pareto [1906] e Frish [1926]. Além disso, as propostas alternativas que se podem encontrar na literatura, como o recurso à noção de *troca*, ou a uma *dimensão exterior* ao problema (em particular, ao conceito de *willingness-to-pay* - cf. [Krantz et al., 1971], [Keeney e Raiffa, 1976], [Dyer e Lorber, 1982]), a *lotarias* ou à noção de *mundos paralelos* (cf. [Camacho, 1982] e [Vansnick, 1984]) não nos parecem simplificar, com vantagem prática sobre as técnicas da bissecção ou de *direct rating*, a formulação das questões postas. Para procurar ultrapassar estas dificuldades, apresenta-se na sequência deste artigo uma nova abordagem ao problema da construção de um critério de valor cardinal sobre *A* a partir de juízos absolutos de diferença de atractividade.<sup>7</sup>

### 3. MACBETH: Uma nova abordagem à construção de um critério cardinal

#### 3.1 Ideia de base e antecedentes

Uma ideia fundamental subjacente à concepção da nossa abordagem ao problema da construção de uma escala cardinal sobre *A* consiste em, ao contrário dos métodos referidos no §2, não pôr ao avaliador questões que envolvem quatro acções, do tipo "a diferença de atractividade entre *a* e *b* é maior, igual ou menor que a diferença de atractividade entre *c* e *d*?". Para evitar os problemas inerentes a este tipo de questões, propomos, em alternativa, envolver apenas duas acções de cada vez, colocando ao avaliador perguntas mais simples que exigem dele apenas a elaboração de juízos absolutos sobre a diferença de atractividade entre duas acções, do tipo:

*Dados os impactos  $i_j(a)$  e  $i_j(b)$  de duas acções potenciais *a* e *b* de *A* segundo um ponto de vista fundamental  $PV_j$  (e, eventualmente os indicadores de dispersão  $\delta_j(a)$  e  $\delta_j(b)$ ), sendo a julgada mais atractiva (localmente) que *b*, a diferença de atractividade entre *a* e *b* é "fraca", "forte", ...?"<sup>8</sup>*

6 Ver críticas em [Fishburn, 1970, p. 81], [Machina, 1981, p. 169], [Sarin, 1983, p. 344], [White, 1985, pp. 334-335], [French, 1988, pp. 91-92], [Farquhar e Keller, 1989], [Roy e Bouyssou, 1993, § 4.4.3].

7 Partilhámos, assim, uma interpretação *intrínseca*, em termos de *diferença de atractividade*, do conceito de *intensidade de preferência* ("strength of preference", cf. [von Winterfeldt e Edwards, 1986, pp. 208-211]), evitando a interpretação em termos de *mutations* ([Roy, 1985]) ou *exchanges* (ver, por exemplo, [McCord e de Neufville, 1983]) que a nosso ver (e como nota French [1988, § 3.7 e § 9.3]) põe problemas pertinentes de falta de significação substantiva.

8 Como princípio de base para a utilização deste tipo de perguntas, fazemos nossas as considerações seguintes do filósofo Nicholas Rescher [1969, p. 70]: "When information of this sort can be elicited from *P* [o nosso avaliador] - and surely it will be available in many or most cases - we can proceed to construct on *P*'s behalf (even if *P* himself will not do so for us) a measure of *degree* of preference in order to capture and reflect with great fidelity the preference stance that *P* himself occupies vis-à-vis the *x<sub>i</sub>* [as nossas acções]. Note that we do not *elicit* the measure from *P*, but rather *construct* it on the basis of information elicited from *P*, doing this in such a way that we do not *impose* any preference commitments upon him but simply reflect those which he affords us."

Para facilitar o diálogo analista/avaliador, introduzimos uma *escala semântica* formada por algumas *categorias de diferença de atractividade*. Assim,  $\forall a, b \in A$  com  $a$  mais atractiva que  $b$  ( $a P b$ ), o avaliador é convidado a exprimir um juízo qualitativo absoluto sobre a diferença de atractividade entre  $a$  e  $b$ , afectando o par  $(a, b)$  a uma e uma só das categorias semânticas propostas.

O mesmo tipo de ideia fôra já avançada por Freeling [1983] e por Belton [1986a e b], na sequência das suas análises críticas do Método de Saaty [1977, 1980]. Convém pois explicar em que é que a nossa metodologia *MACBETH* (*Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique*) se distingue muito claramente dos trabalhos de Saaty por um lado e de Freeling e Belton por outro. No que respeita a Saaty, é importante começar por realçar que a escala semântica que ele utiliza no seu método *não é*, ao contrário da que utilizamos em *MACBETH*, uma escala de *diferenças de atractividade*, mas sim uma escala de *racios de prioridade* (ou *importância*). Estes dois conceitos, *prioridade e importância*, são diferentes do conceito de *atractividade*, uma vez que não é possível descer abaixo de um grau nulo de prioridade ou de importância, enquanto que o conceito de *atractividade* admite um oposto: o de *repulsividade*. A desvantagem de trabalhar com um conceito *monopolar* (como o de prioridade ou o de importância) é que, neste caso, o *zero* não representa um *nível neutro*, tendo antes uma conotação nitidamente negativa, pois que representa "*the condition of maximal absence of something that is a genuine value*" [Rescher, 1969, p. 64]. Este facto pode gerar uma certa confusão no espírito de quem deve emitir juízos de valor e, portanto, põe problemas de falta de significação substantiva (agravados se se interpretarem as respostas às questões do tipo Saaty em termos de intensidade de preferência - cf. [Lootsma, 1993]). No que diz respeito, ao mesmo tempo, aos trabalhos de Saaty, Freeling e Belton, *MACBETH* distingue-se claramente nos pontos seguintes: O que fazem estes três autores apresenta um carácter não só muito restritivo mas também totalmente *arbitrário* na *passagem do semântico ao quantitativo*, uma vez que todos fazem corresponder a cada categoria, da escala semântica que introduzem, um e um só número real (ou, geometricamente, um e um só ponto de uma recta graduada) *arbitrariamente fixado* como medida da diferença de valor (em Freeling e Belton) ou do rácio de prioridade (em Saaty) correspondente a essa categoria. Em *MACBETH*:

- por um lado, *é um intervalo da recta real que é associado a cada uma das categorias;*
- por outro lado, *este intervalo não é fixado a priori.*

A regra de codificação numérica que propomos consiste em associar a cada acção  $a$  de  $A$  um número real  $v(a)$  tal que as diferenças  $v(a) - v(b)$ , com  $a P b$ , sejam o mais possível compatíveis com os juízos absolutos de diferença de atractividade formulados pelo avaliador, no sentido em que, para todos os pares  $(a, b)$  afectados a uma mesma categoria, as diferenças  $v(a) - v(b)$  pertençam ao mesmo intervalo, sem que os intervalos correspondentes a categorias diferentes se sobreponham. De forma mais precisa, *à partição em categorias do conjunto dos pares ordenados  $(a, b)$  de  $A \times A$  tais que  $a P b$ , propomos associar uma partição da semi-recta*

dos reais positivos em intervalos, dois intervalos contíguos correspondendo a duas categorias consecutivas. No plano prático, para determinar estes intervalos basta definir os seus limites, os quais podem ser vistos como *limiares de diferença de valor* que fazem a transição entre categorias consecutivas.

Desta forma, *MACBETH* liga-se ao problema teórico da representação numérica de *semi-ordens múltiplas por limiares constantes*, problema estudado e resolvido por Doignon [1987] no caso geral. Seja  $(P^{(1)}, \dots, P^{(k)}, \dots, P^{(m)})$  uma estrutura de  $m$  relações binárias, em que  $P^{(k)}$  representa uma *relação de preferência tanto mais forte quanto  $k$  é grande*, sempre em termos de um dado ponto de vista fundamental  $PV_j$ . As semi-ordens múltiplas introduzem-se de maneira natural desde que se queira representar as preferências através de uma função  $v$  e de funções-limiais  $s_k$  tais que, por exemplo:

$$a P^{(k)} b \Leftrightarrow s_k < v(a) - v(b) < s_{k+1}.$$

No nosso caso, os *limiares  $s_k$  são constantes* reais positivas, que limitam os intervalos correspondentes às categorias semânticas  $C_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Recorde-se que uma escala de diferenças de atractividade é uma escala limitada à esquerda, pelo seu zero, mas não limitada à direita (sendo  $a P^{(m)} b$ , é sempre teoricamente possível encontrar um nível de impacto definindo uma acção real ou fictícia  $c$  tal que  $c$  é preferível a  $b$  mais do que  $a$  é preferível a  $b$ ). Então, a *última* categoria  $C_m$  é não limitada à direita. Entre a origem  $s_1 = 0$  e  $s_m$  toda uma infinidade de limiares e, por conseguinte, de categorias, podem ser definidos.

No entanto, segundo Blumenthal [1977, p. 88] o número de nuances que uma pessoa é capaz de introduzir aquando da expressão de um juízo absoluto é muito limitado:

"These limits vary within a narrow range now commonly known as the magical number 7 plus-or-minus 2 following Miller's (1956) description".

O processo de interacção utilizado na abordagem *MACBETH* leva em conta estes conhecimentos. Concretamente, *MACBETH propõe ao avaliador que exprima os seus juízos absolutos de diferença de atractividade por uma de seis categorias ( $m = 6$ )<sup>9</sup>, de dimensão não necessariamente igual* (ver figura 2):

- $C_1 \rightarrow$  diferença de atractividade muito fraca;
- $C_2 \rightarrow$  diferença de atractividade fraca;
- $C_3 \rightarrow$  diferença de atractividade moderada;
- $C_4 \rightarrow$  diferença de atractividade forte;
- $C_5 \rightarrow$  diferença de atractividade muito forte.
- $C_6 \rightarrow$  diferença de atractividade extrema.

9 7 categorias, com a indiferença (diferença de atractividade nula) entre duas acções. Note-se que este número não é minimamente restritivo da aplicação do método nem da sua formulação matemática.

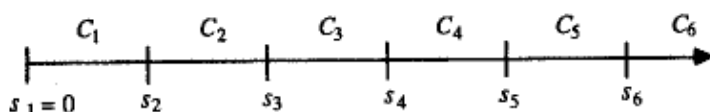


Figure 2 - Categorias de diferença de atractividade

Se o avaliador formou a convicção de que duas acções (ou mais) são igualmente atractivas, basta representar essas acções indiferentes por uma e uma só de entre elas no processo de avaliação absoluta por pares. Assim, para nos podermos concentrar na componente cardinal do problema, assumiremos neste artigo que existe já definida uma ordenação das acções de  $A$  por ordem decrescente de atractividade e que essa ordenação não contém *ex-aequo*. Tal corresponde a admitir verificada a hipótese  $H$  a seguir enunciada.

**Hipótese H:** Existe uma relação binária  $P$  definida em  $A$ , assimétrica, negativamente transitiva e conexa, que modeliza os juízos de atractividade de natureza ordinal do avaliador relativamente às acções de  $A$ .<sup>10</sup>

Na prática, sendo  $A = \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1\}$  o conjunto de  $n$  acções a avaliar, em que estas se apresentam já ordenadas por ordem decrescente de atractividade  $a_n P a_{n-1} P \dots P a_1$  sem *ex-aequo* (tendo em conta a hipótese  $H$ ), a primeira parte do processo de avaliação corresponde a preencher a sub-matriz triangular superior da matriz  $n \times n$  das respostas categorizadas:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & \cdot & a_3 & a_2 & a_1 \\
 a_n & & x_{n, n-1} & x_{n, n-2} & \cdot & \cdot & x_{n, 3} & x_{n, 2} & x_{n, 1} \\
 a_{n-1} & & & x_{n-1, n-2} & \cdot & \cdot & x_{n-1, 3} & x_{n-1, 2} & x_{n-1, 1} \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_3 & & & & \cdot & \cdot & & x_{3, 2} & x_{3, 1} \\
 a_2 & & & & \cdot & \cdot & & & x_{2, 1} \\
 a_1 & & & & \cdot & \cdot & & & 
 \end{array}$$

em que,  $\forall i > j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_{ij}$  toma o valor  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  se o avaliador afectar o par  $(a_i, a_j)$  à categoria  $C_k$ .

### 3.2 Consistência dos juízos absolutos formulados

A abordagem *MACBETH* propõe ao avaliador certas hipóteses lógicas de trabalho na elaboração dos seus juízos de diferença de atractividade entre acções, que se traduzem na verificação de aspectos relacionados com a *consistência* dos juízos expressos.

<sup>10</sup> Note-se, entretanto, que esta hipótese é de todo dispensável na aplicação prática da metodologia *MACBETH*.



Comecemos por notar que, se o avaliador afectou o par de acções  $(a, b)$ , com  $a P b$ , à categoria  $C_k$  e o par  $(b, c)$  à categoria  $C_{k'}$  tais que  $k > k'$ , isto deve significar, indirectamente, que para o avaliador  $a$  é mais atractiva que  $b$  mais do que  $b$  é mais atractiva que  $c$ , isto é, em termos de diferenças de valor,  $v(a) - v(b) > v(b) - v(c)$ . Nesta linha de raciocínio, é então lógico propôr, como hipótese de trabalho (*chave*) para a construção das preferências cardinais, que a diferença de valor  $v(a) - v(c)$  entre as acções  $a$  e  $c$  seja pelo menos tão grande como as diferenças de valor entre  $a$  e  $b$  e entre  $b$  e  $c$ . Um teste de consistência semântica entre ternos de acções pode agora ser enunciado:

$$(a, b) \in C_k \text{ e } (b, c) \in C_{k'} \Rightarrow (a, c) \in C_{k''}, \text{ com } k'' \geq \max\{k, k'\}.$$

A verificação desta condição para todo o terno de acções tais que  $a P b P c$  garante que, se não existirem ciclos de inconsistência semântica entre três acções, não existirá seguramente nenhum ciclo de inconsistência semântica entre quatro ou mais acções. É claro que, o avaliador é semanticamente consistente nas suas respostas se, e só se, na matriz triangular superior dos julgamentos verbais, os valores  $x_{ij}$  correspondentes não decrescerem em linha nem crescerem em coluna. Este tipo de teste insere-se perfeitamente na perspectiva interactiva de aprendizagem que defendemos para o apoio à decisão e a que qualquer ferramenta técnica deve subordinar-se (cf. [Bana e Costa, 1993]).

A nossa experiência empírica de utilização deste teste em casos reais tem mostrado que os avaliadores, ao ser-lhes assinalada uma inconsistência semântica, rapidamente revêm os juízos nela envolvidos, e que há medida que se vão familiarizando e aprendendo com o processo de avaliação por categorias, as situações de inconsistência reduzem-se significativamente.

Uma vez afectados todos os pares  $(a, b)$ , de acções de  $A$ , tais que  $a P b$ , a uma das 6 categorias semânticas  $C_1$  a  $C_6$  de diferença de atractividade, MACBETH procurará determinar simultaneamente, por programação linear:

- 6 números reais  $s_1$  a  $s_6$  que servirão de limites aos intervalos que representarão numericamente as 6 categorias semânticas,
- uma aplicação  $v(\cdot): A \rightarrow \mathfrak{R}$  fazendo corresponder a cada acção  $a \in A$  um número real  $v(a)$ ,

de tal forma que,  $\forall a, b \in A$  com  $a P b$ , as condições seguintes sejam satisfeitas:

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_6 \quad (1)$$

$$\begin{cases} s_k < v(a) - v(b) < s_{k+1} & \text{sse } (a, b) \in C_k, k \neq 6, \\ s_6 < v(a) - v(b) & \text{sse } (a, b) \in C_6 \end{cases} \quad (2)$$

Mesmo quando a matriz de juízos absolutos é semanticamente consistente, para ela ser compatível com o tipo de representação numérica desejada - o mesmo é dizer, para que existam 6 números reais  $s_1$  a  $s_6$  e uma aplicação  $v(\cdot): A \rightarrow \mathfrak{R}: a \rightarrow v(a)$  satisfazendo as condições (1) e (2) - é necessário que os juízos do avaliador satisfaçam outros requisitos de *consistência cardinal*. De facto, é bem conhecido da teoria que a representação numérica de semi-ordens múltiplas por limiares constantes nem sempre é possível (cf. [Doignon, 1987]; ver também

[Cozzens e Roberts, 1982] e [Roy e Vincke, 1987]). Vejamos um exemplo simples. Seja  $A = \{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1\}$  com as seguintes respostas do avaliador:

	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$
$a_5$		2	2	5	6
$a_4$			1	3	4
$a_3$				2	4
$a_2$					3
$a_1$					

Deduz-se de  $(a_5, a_3) \in C_2$ ,  $(a_3, a_2) \in C_2$  e  $(a_5, a_2) \in C_5$  que se deveria ter  $s_4 < 2 \cdot s_2$  e de  $(a_4, a_2) \in C_3$ ,  $(a_2, a_1) \in C_3$  e  $(a_4, a_1) \in C_4$  que se deveria ter  $2 \cdot s_2 < s_4$ , o que é evidentemente impossível.

### 3.3 MACBETH, um método interactivo; formulação matemática

MACBETH foi concebido para ser utilizado como um *método interactivo* de apoio à construção de uma escala cardinal sobre um conjunto  $A$  de acções, através da resolução, tecnicamente encadeada, de quatro programas lineares,  $Mc1$  a  $Mc4$  (figura 4), inicialmente formulados em [Bana e Costa e Vansnick, 1994] e para os quais propomos aqui uma nova formulação mais simples. O programa  $Mc1$ , o primeiro a ser utilizado, analisa a consistência cardinal do conjunto dos juízos de diferença de atractividade dados pelo avaliador, isto é, se existem limiares constantes  $s_1 = 0, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  e uma aplicação  $v(\cdot) : A \rightarrow \mathfrak{R} : a \rightarrow v(a)$  verificando as condições (1) e (2). Matematicamente, o problema pode ser assim formulado:

#### Problema 1:

Restrições:

- r0) todas as variáveis  $\geq 0$ ;
- r1)  $s_1 = 0$
- r2)  $v(a_1) = 0$  em que  $\forall a \in A, a \neq a_1$   
(o valor atribuído à acção menos atractiva  $a_1$  é fixado igual a 0, o que não é restritivo);
- r3)  $\forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\} : s_k - s_{k-1} \geq 1000$
- r4)  $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \forall (a, b) \in C_k : v(a) - v(b) \geq s_k + 1 - c$
- r5)  $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a, b) \in C_k : v(a) - v(b) \leq s_{k+1} - 1 + c.$

**Função-objectivo:** Minimizar  $c$

(a diferença de atractividade entre duas acções deve estar, se possível, no intervalo correspondente à categoria respectiva;  $c$  é uma variável auxiliar - ver figura 3).

Se a solução do problema 1 for  $c_{min} = 0$ , o conjunto dos juízos dados pelo avaliador é consistente e, portanto, existe uma função-critério cardinal compatível com esses juízos, sendo uma solução dada pelo programa  $Mc2$ . Caso contrário, se  $c_{min} > 0$ , há inconsistência nos juízos dados, isto é, para se encontrar uma representação numérica do tipo desejado é

necessário modificar algum ou alguns dos juízos iniciais, para o que se poderá seguir sugestões dadas pelos programas *Mc3* e *Mc4*. O resultado do programa *Mc1* é, assim, o valor de um indicador de inconsistência  $c_{min}$ , que (contrariamente ao índice de inconsistência proposto por Saaty no seu método) tem uma significação substantiva simples e directa.

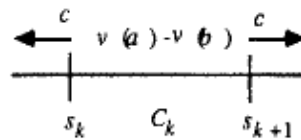


Figura 3 - Função da variável  $c$

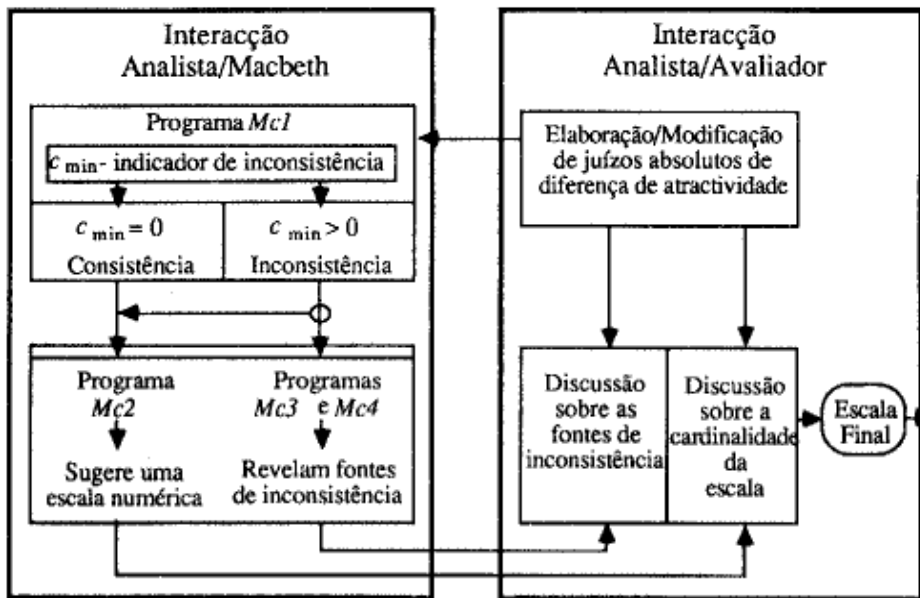


Figura 4 - Esquema de interação MACBETH

O programa *Mc2* determina números reais  $s_1 = 0, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  e  $v(a)$  ( $a \in A$ ) que satisfazem as restrições  $r1$  a  $r5$  depois de substituir em  $r4$  e  $r5$  a variável  $c$  pelo valor  $c_{min}$  determinado pelo programa *Mc1*. A formulação do problema resolvido por *Mc2* é:

**Problema 2:**

Restrições:

$r0, r1, r2, r3$  do problema 1;

$r4') \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \forall (a, b) \in C_k: v(a) - v(b) \geq s_{k+1} - c_{min}$

$r5') \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a, b) \in C_k: v(a) - v(b) \leq s_{k+1} - 1 + c_{min}$

$r6) \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a, b) \in C_k: v(a) - v(b) = (s_k + s_{k+1})/2 + \epsilon(a, b) - \eta(a, b)$   
(ver figura 5);

$r7) \forall (a, b) \in C_6: v(a) - v(b) = s_6 + 1 - \alpha(a, b) + \delta(a, b).$

$$\text{Função-objectivo: } \text{Min} \left\{ \sum_{\substack{(a,b) \in C_k \\ k \in \{1,2,3,4,5\}}} [\varepsilon(a,b) + \eta(a,b)] + \sum_{(a,b) \in C_6} \alpha(a,b) \right\}$$

(a diferença de valor entre duas acções da categoria  $C_k$  ( $k \neq 6$ ) deve ser o mais próxima possível da diferença de valor entre outro par de  $C_k$  e ao mesmo tempo o mais afastada possível da diferença de valor entre acções de outra categoria, o que é traduzido pela tentativa de centrar  $v(a) - v(b)$  o mais possível no intervalo associado à categoria respectiva; note-se que em qualquer solução básica do programa linear correspondente se tem sempre  $\varepsilon(a, b) \cdot \eta(a, b) = 0$ ).

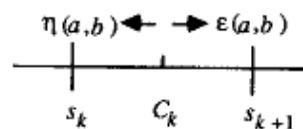


Figura 5 - Função das variáveis  $\eta(a, b)$  e  $\varepsilon(a, b)$  para  $C_k$  ( $k \neq 6$ )

Quando  $c_{min} = 0$ , isto é, quando o conjunto dos juízos dados pelo avaliador é consistente, o processo de interacção pode entrar directamente numa fase de discussão centrado sobre a validação da *condição 1* (cf. §2) pela escala dos valores  $v(a)$ ,  $a \in A$ , dada pelo programa *Mc2*. Uma forma de apresentar ao avaliador os valores  $v(a)$  consiste numa representação gráfica em que cada acção  $a$  de  $A$  é colocada sobre um eixo vertical do modo seguinte:

- 1)  $\forall a, b \in A$ ,  $a$  é colocada mais acima que  $b$  se e só se  $a P b$
- 2)  $\forall a, b, c, d \in A$  com  $a P b$  e  $c P d$ , o quociente [distância entre os pontos  $a$  e  $b$ ] / [distância entre os pontos  $c$  e  $d$ ] é igual ao quociente [ $v(a) - v(b)$ ] / [ $v(c) - v(d)$ ].

Por outro lado, se  $c_{min} > 0$ , isto é, quando há inconsistência nos juízos de diferença de atractividade dados pelo avaliador, os valores  $v(a)$ ,  $a \in A$ , dados pelo programa *Mc2*, "conciliam" os juízos inconsistentes. Estes valores podem ser apresentados ao avaliador, passando-se directamente à fase de validação da escala. Um procedimento alternativo, mais prudente e adequado a uma perspectiva interactiva de aprendizagem no apoio à decisão, consiste em re-analisar dos juízos iniciais, discutindo com o avaliador as possíveis modificações que ele estará disposto a fazer por forma a tentar ultrapassar os problemas de inconsistência. É com o objectivo de facilitar esta fase de discussão que foram concebidos os programas *Mc3* e *Mc4* que evidenciam possíveis causas de inconsistência.

Tecnicamente, os programas *Mc3* e *Mc4* resolvem, respectivamente, os problemas 3 e 4, com a mesma função-objectivo e que apenas diferem no facto de as restrições  $r4'$  e  $r5'$  fazerem apenas parte do problema 3:

#### Restrições do problema 3:

$r0, r1, r2, r3, r4', r5'$  do problema 2;

$$r8) \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \forall (a, b) \in C_k: v(a) - v(b) = s_k + 1 - \alpha(a, b) + \delta(a, b)$$

$$r9) \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a, b) \in C_k: v(a) - v(b) = s_{k+1} - 1 + \beta(a, b) - \gamma(a, b).$$

Restrições do problema 4:  $r0, r1, r2, r3, r8$  e  $r9$ .

Função-objectivo comum aos problemas 3 e 4:

$$\text{Min} \left\{ \sum_{\substack{(a,b) \in C_k, \\ k \in \{1,2,3,4,5\}}} \beta(a,b) + \sum_{\substack{(a,b) \in C_k, \\ k \in \{2,3,4,5,6\}}} \alpha(a,b) \right\}$$

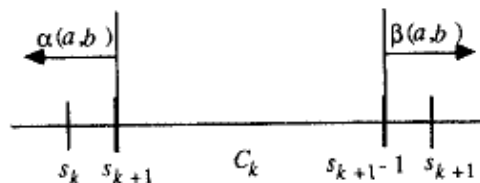


Figura 6 - Função das variáveis  $(a, b)$  e  $(a, b)$  para  $C_k$  ( $k \neq 6$ )

Ao minimizar a soma das variáveis  $\alpha(a, b)$  e  $\beta(a, b)$  os programas *Mc3* e *Mc4* fazem ressaltar pares de acções cuja afectação às categorias respectivas especificadas pelo avaliador introduz problemas de inconsistência. Esses pares são aqueles para os quais resultam valores de  $\alpha(a, b)$  ou de  $\beta(a, b)$  diferentes de zero na solução óptima dos problemas 3 e 4, respectivamente (ver figura 6). É evidente que em qualquer solução dos programas lineares correspondentes ter-se-á sempre  $\alpha(a, b) \cdot \beta(a, b) = 0$  e que em caso de consistência ( $c_{min} = 0$ ) todas estas variáveis auxiliares são nulas. A diferença entre as soluções óptimas destes dois problemas tem a ver com o facto de se restringirem (problema 3) ou não (problema 4) as soluções possíveis a valores das variáveis  $\alpha(a, b)$  e  $\beta(a, b)$  não superiores ao valor de  $c_{min}$ , pela introdução ou não das restrições  $r4'$  e  $r5'$ . Finalmente, é importante ter presente que, numa via construtiva de apoio à decisão, as sugestões de modificação de juízos têm um carácter estritamente indicativo (não normativo).

#### 4. Aplicação de MACBETH no caso da concepção de uma boa alternativa de ligação ferroviária ao porto de Lisboa

A nova ligação ferroviária ao porto de Lisboa tem vivido, ao longo dos últimos anos, numa situação de impasse, provocada por um conflito de pontos de vista entre as entidades envolvidas. Entretanto, a elaboração do Plano de Urbanização do Vale de Alcântara veio criar condições para a concepção de uma nova alternativa de consenso, levando em conta os sistemas de valores dos vários intervenientes. Bana e Costa e Nunes da Silva [1994] descrevem a metodologia multicritério seguida para apoiar a equipa do plano na construção de uma "boa" solução, a partir do estudo dos impactos das alternativas existentes.

Da fase de estruturação resultou uma família  $F = \{PV_j, j = 1, \dots, n\}$  de  $n = 9$  pontos de vista fundamentais e um conjunto  $I_j$  de níveis de impacto plausíveis segundo cada  $PV_j$  - chamado "descriptor de impactos" - que permitiu definir o impacto  $i_j(a)$  de cada acção potencial  $a$  segundo cada  $PV_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Em cada  $I_j$  identificou-se um nível de impacto neutro  $i_{0j}$  - isto é, um nível considerado nem atractivo nem repulsivo segundo  $PV_j$ .

Para ilustrar a aplicação da abordagem *MACBETH*, retivemos no quadro I apenas os elementos correspondentes aos pontos de vista  $PV_2$ ,  $PV_7$  e  $PV_8$ , os únicos em que os juízos absolutos respectivos expressos pelo avaliador apresentavam problemas de inconsistência.

Pontos de vista fundamentais	Descritores de impactos
<p><math>PV_2</math></p> <p>Efeito de corte de tecido urbano</p>	<p><math>I_2</math> Comprimento do atravessamento à superfície em viaduto ou em vala aberta, em áreas consolidadas (metros)</p> <p>Melhor nível = 0 metros Nível neutro = 400 metros Pior nível = 1200 metros</p>
<p><math>PV_7</math></p> <p>Conflitualidade com infraestruturas exist. ou previstas</p>	<p><math>I_7</math> Sobreposição do traçado com as três principais infraestruturas de transportes da zona (escala qualitativa)</p> <p>Nível de impacto: Descrição:</p> <p>++ Nenhuma interferência</p> <p>+ Não interfere com a Av. de Ceuta e interfere com uma só das 2 outras infraestruturas (ramal de Alcântara ou acesso ao porto)</p> <p>o (neutro) Não interfere com a Av. de Ceuta e interfere com as 2 outras infraestruturas (ramal de Alcântara e acesso ao porto)</p> <p>- Interfere com a Av. de Ceuta e interfere com uma só das 2 outras infraestruturas (ramal de Alcântara ou acesso ao porto)</p> <p>-- Interfere com todas as três infraestruturas</p>
<p><math>PV_8</math></p> <p>Faseamento da construção</p>	<p><math>I_8</math> Possibilidade de fasear a construção e implicações com o ramal de Alcântara (escala qualitativa)</p> <p>Nível de impacto: Descrição:</p> <p>++ É possível fasear a obra em todos os seus troços mantendo a funcionar o ramal de Alcântara</p> <p>+ É possível fasear a obra em apenas dois dos seus troços mantendo a funcionar o ramal de Alcântara</p> <p>o (neutro) Não permite fasear mas é possível manter a funcionar o ramal de Alcântara</p> <p>- É possível fasear a obra em apenas dois dos seus troços não mantendo a funcionar o ramal de Alcântara</p> <p>-- Não permite fases e não é possível manter a funcionar o ramal de Alcântara</p>

Quadro I - Pontos de vista e descritores

O descritor  $I_2$  de impactos segundo  $PV_2$  é *quantitativo* e *indirecto* ("proxy-attribute" na terminologia de Keeney [1992, p. 103]), enquanto  $I_7$  e  $I_8$  são descritores *construídos*, de que se mostram no quadro I os respectivos níveis. Por sua vez, o quadro II mostra os impactos

$i_2(a)$ ,  $i_7(a)$  e  $i_8(a)$  (todos pontuais) de cada uma das 9 soluções existentes ( $a = a_1, \dots, a_9$ ) sobre os 3 pontos de vista fundamentais.

Impactos	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
$i_2$ (metros)	1200	1020	400	260	300	580	700	1120	0
$i_7$	+	+	++	+	++	+	-	-	++
$i_8$	o	--	o	o	o	o	o	-	o

Quadro II - Impactos

→	$a_4$ (260 m)	$a_5$ (300 m)	$a_3$ (400 m)	$a_6$ (580 m)	$a_7$ (700 m)	$a_2$ (1020 m)	$a_1$ (1200 m)
$a_9$ (0 m)	4	5	5	5	6	6	6
$a_4$ (260 m)		1	2	3	4	5	6
$a_5$ (300 m)			2	2	4	4	5
$a_3$ (400 m)				2	2	4	4
$a_6$ (580 m)					2	3	4
$a_7$ (700 m)						2	2
$a_2$ (1020 m)							1

Quadro III - Matriz de juízos absolutos de diferença de atractividade segundo  $PV_2$ 

→	+	o	-	--
++	5	5	5	6
+		4	5	6
o			4	5
-				4

Quadro IV - Juízos iniciais segundo  $PV_7$ 

→	+	o	-	--
++	3	3	5	6
+		4	4	6
o			4	5
-				4

Quadro V - Juízos iniciais segundo  $PV_8$ 

As funções-critérios cardinais  $v_2$ ,  $v_7$  e  $v_8$  foram construídas a partir das respostas iniciais do avaliador (a equipa do plano) ao questionário *MACBETH*. As respectivas matrizes de juízos absolutos categorizados são mostradas nos quadros III a V. Segundo os pontos de vista  $PV_7$  e  $PV_8$  foram comparados os pares de níveis dos descritores respectivos, enquanto que os juízos segundo  $PV_2$  se reportam directamente aos pares de acções ( $a, b$ ) tais que  $a P b$ .

Numa primeira análise dos impactos segundo  $PV_2$ , o avaliador considerou difícil de avaliar diferenças de dois impactos inferiores a  $\delta_2 = 10\%$  do maior deles, face à indeterminação inerente ao facto do descritor  $I_2$  ser indirecto e à imprecisão do processo de cálculo dos

impactos  $i_2(a)$  - medição em carta; deste modo a alternativa  $a_8$  não entrou no processo de avaliação inicial, dado que  $i_2(a_1) - i_2(a_8) = 80\text{m}$  é menor que  $0.10 \times 1200\text{m}$ .

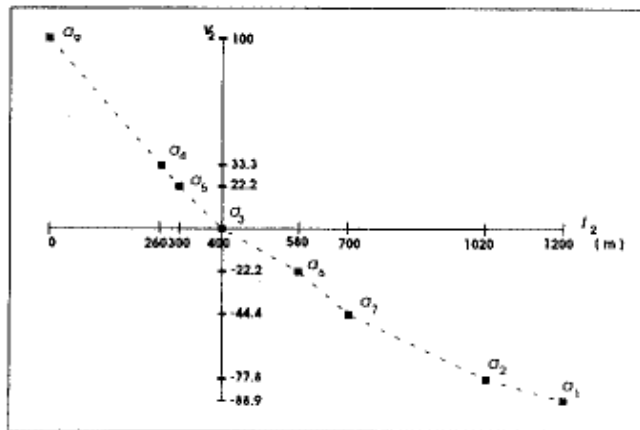


Figura 7 - Função-critério segundo  $PV_2$

O conjunto dos juízos de diferença de atractividade segundo  $PV_2$  é semanticamente consistente, como se constata facilmente no quadro III observando que as categorias dos juízos não decrescem da esquerda para a direita em cada linha, nem crescem de cima para baixo em cada coluna. Passou-se então à aplicação dos programas *MACBETH*, sendo  $c_{min} = 1 (> 0)$  o resultado do programa *Mc1*, o que mostra que existem problemas de inconsistência cardinal. Em conformidade, o analista perguntou ao avaliador se aceitava rever algum dos juízos iniciais, tendo este referido que tinha dúvidas sobre o juízo  *muito forte*  entre as acções  $a_9$  e  $a_5$ , precisamente um dos destacados pelo programa *Mc4* como fonte de inconsistência, sugerindo baixá-lo para a categoria  *forte* .

Introduzida esta alteração, procedeu-se de novo à aplicação dos programas *MACBETH*, para dar sequência ao processo interactivo de discussão (figura 4). O resultado de *Mc1* é agora  $c_{min} = 0$ , mostrando que os problemas de inconsistência foram ultrapassados, podendo pois passar-se à discussão da escala numérica  $v$  proposta pelo programa *Mc2* (re-escalada na figura 7 por forma a que  $v_2(\text{nível neutro}) = 0$  e  $v_2(\text{melhor nível}) = 100$ ). Note-se que, se  $i_2(a_2)$  fosse 550 m em vez de 580 m (diferença inferior ao indicador de dispersão  $\delta_2$ ) a função  $v_2$  resultaria linear entre  $a_3$  e  $a_7$ . Uma vez validada a cardinalidade da escala,  $v_2(a_8)$  foi definido por interpolação linear.

No que respeita ao ponto de vista  $PV_7$ , o conjunto dos juízos de diferença de atractividade entre os seus níveis de impacto (ver quadro IV) embora seja semanticamente consistente, apresenta também, como no caso anterior, problemas de inconsistência cardinal, pois que  $c_{min} = 1 (> 0)$ . No entanto, agora, o avaliador preferiu manter os seus juízos iniciais e discutir directamente sobre a escala numérica proposta pelo programa *Mc2*, cujos valores são



apresentados na figura 8, marcados sobre um eixo vertical, com indicação dos juízos iniciais entre níveis consecutivos.

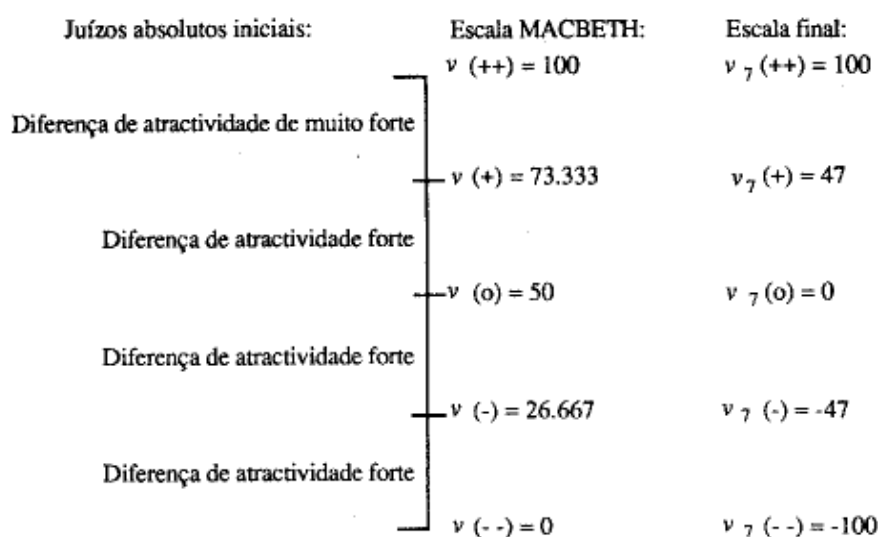
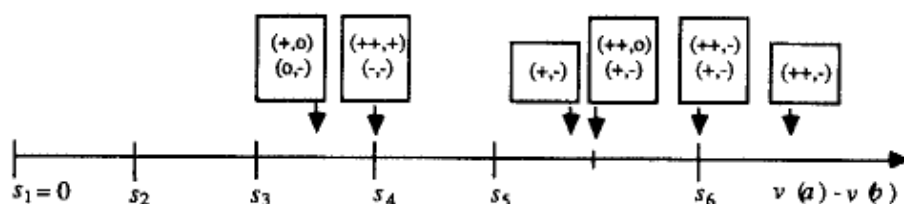


Figura 8 - Escala de diferença de valor segundo  $PV_7$

Note-se que  $v(++)-v(+)>v(+)-v(o)=v(o)-v(-)$ , respeitando os juízos iniciais. Mas, no entanto,  $v(-)-v(--)=v(++)-v(+)$ , o que fez o avaliador reflectir sobre o seu juízo *forte* entre os dois níveis "negativos", do que concluiu que sentia de facto uma diferença de atractividade tão forte entre estes como entre os dois níveis "positivos". Por fim, foi discutido o facto de, ao juízo *muito forte* dado para o par  $(+, -)$ , *Mc2* fazer corresponder uma diferença de valor igual à entre os níveis  $+ e -$ , cujo juízo é *extremo*. Neste caso, o avaliador disse que não o repugnaria muito baixar o seu juízo inicial entre  $+ e -$  para *muito forte*, embora achasse que os dois pares estariam ambos *somewhere* entre *muito forte* e *extremo*, tal como aliás identicamente colocaria os pares  $(++, +)$  e  $(-, --)$  ambos entre *forte* e *muito forte*. Curiosamente, ou não, quando aplicado ao conjunto de juízos do quadro IV, o programa *Mc3* coloca, precisamente, por um lado,  $(++, -)$  e  $(+, -)$  sobre a fronteira  $s_6$  entre  $C_5$  e  $C_6$  e, por outro lado,  $(++, +)$  e  $(-, --)$  sobre o limiar  $s_5$  que separa  $C_4$  de  $C_5$ . Aliás, *Mc2* faz exactamente o mesmo, como se mostra na figura 9, em que os resultados foram marcados sobre a semi-recta dos reais positivos. Uma vez aceite a escala  $v$ , procedeu-se, finalmente, à sua transformação linear, por forma a ter-se  $v_7(o) = 0$  e  $v_7(++ ) = 100$  (ver figura 8).

Figura 9 - Representação geométrica dos resultados de  $Mc2$  para os juízos segundo  $PV_7$ 

→	+	o	-	--
++	3	4	5	6
+		4	4	6
o			4	5
-				4

Quadro VI - Juízos revistos segundo  $PV_8$ 

v(++) = 100	v <sub>8</sub> (++) = 100
v(+) = 82.1	v <sub>8</sub> (+) = 55
v(o) = 60.7	v <sub>8</sub> (o) = 0
v(-) = 39.3	v <sub>8</sub> (-) = -55
v(--)= 0	v <sub>8</sub> (--)= -155

Figura 10 - Escala de diferença de valor segundo  $PV_8$ 

No que respeita aos juízos de diferença de atratividade entre os níveis de impacto do descritor  $I_8$  do ponto de vista  $PV_8$  (ver quadro V), é fácil verificar que existe um problema de inconsistência semântica na sequência  $(++, +) \in C_3$ ,  $(+, o) \in C_4$  e  $(++, o) \in C_3$ . Quando confrontado com esta situação, o avaliador estendeu mudar  $(++, +)$  de  $C_3$  para  $C_4$ , o que resolve o problema de inconsistência semântica.

Como nenhuma outra modificação foi introduzida, passou-se à análise da consistência cardinal do conjunto de juízos revistos (tabela VI). O resultado de  $Mc1$  é  $c_{min} = 0$ , o que mostra que se está perante juízos consistentes, pelo que se passou à discussão da escala numérica proposta por  $Mc2$ , mostrada na figura 10. Uma vez aceite pelo avaliador, foi a mesma reescalada por forma a ter-se  $v_8(o) = 0$  e  $v_8(++)= 100$ .

## 5. Conclusões

A abordagem *MACBETH*, apresentada neste artigo, é uma ferramenta potente para ultrapassar os problemas operacionais reconhecidos na aplicação das técnicas tradicionais de construção de critérios de valor cardinal. Baseada em juízos semânticos sobre a diferença de atractividade sentida por um avaliador entre pares de elementos de um conjunto, *MACBETH* testa a consistência dos juízos expressos, detecta fontes de inconsistência, quando esta existe, facilitando a revisão dos juízos em causa, e propõe uma escala numérica compatível com os juízos absolutos do avaliador.

Embora *MACBETH* seja uma abordagem de desenvolvimento recente, existem já várias aplicações práticas bem sucedidas em casos reais de apoio à decisão, de que é exemplo o caso apresentado neste artigo. Em [Bana e Costa et al., 1995] apresenta-se um outro caso interessante, em que *MACBETH* foi utilizado para ajudar a definir os coeficientes de ponderação dos critérios de apreciação das propostas apresentadas a um grande concurso internacional de obras públicas, no quadro de um modelo de agregação aditivo. Também em [Bana e Costa et al., 1994] se descreve uma aplicação no âmbito da concepção de um modelo multicritério de definição de prioridades de intervenção na reparação do parque habitacional da Câmara Municipal de Lisboa.

Os programas lineares *Mc1* a *Mc4* estão, de momento, implementados informaticamente em *GAMS-MINOS* (*General Algebraic Modeling System*, cf. [Brooke et al., 1992]) sendo os respectivos tempos de resolução dos 4 programas encadeados, num *PC-486/33*, inferiores a 3 segundos para matrizes 10 por 10 (45 juízos). Entretanto, um protótipo não dependente de *GAMS* está actualmente em fase de programação, contando-se concluir uma versão 0 do *package MACBETH* ainda em 1995.

Note-se, por fim, que embora o método tenha sido apresentado com base na noção de atractividade, ele é também facilmente generalizável a outro tipo de conceitos, como seja a construção de escalas de *credibilidade*.

## Referências

- [1] Bana e Costa, C.A. (1990) (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag.
- [2] Bana e Costa, C.A. (1993), Três convicções fundamentais na prática do Apoio à Decisão, *Pesquisa Operacional* 13-1, 9-20.
- [3] Bana e Costa, C.A., Oliveira, R.C., Matos, J.C., Alvarez, M.L. (1994), Concepção de um sistema multicritério de definição de prioridades de intervenção/conservação do património habitacional da C.M.L., *Actas do 2º ENCORE*, LNEC, Lisboa, 925-934.
- [4] Bana e Costa, C.A., Nunes da Silva, F. (1994), Ligação ferroviária ao porto de Lisboa: uma aplicação da Metodologia Multicritério de Apoio à Decisão e à Negociação, *Investigação Operacional* 14, 115-131.
- [5] Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C. (1994), *MACBETH - An interactive path towards the construction of cardinal value functions*, *International Transactions in Operations Research* 1, 489-500.
- [6] Bana e Costa, C.A., Antunes Ferreira, J.A., Vansnick, J.C. (1995), Avaliação multicritério de propostas: o caso de uma nova linha do metropolitano de Lisboa, *Revista de Transportes e Tecnologia* (em edição).
- [7] Belton, V. (1986a), A comparative study of methods for multiple criteria decision aiding, *Thèse de Doctorat*, University of Cambridge.
- [8] Belton, V. (1986b), A comparison of the analytic hierarchy process and a simple multiattribute value function, *Eur. J. Opl. Res.* 26, 7-21.
- [9] Blumenthal, A.L. (1977), *The Process of Cognition*, Prentice-Hall.

- [10] Brams, S.J., Fishburn, P.C. (1983), *Approval Voting*, Birkhäuser.
- [11] Brooke, A., Kendrick, D., Meeraus, A. (1992), *GAMS :A User's Guide, Release 2.25*, The Scientific Press.
- [12] Buede, D.M., Choisser, R.W. (1992), Providing an analytic structure for key system design choices, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 1, 17-27.
- [13] Camacho, A. (1982), *Societies and Social Decision Functions. A Model with Focus on the Information Problem*, Reidel.
- [14] Cozzens, M.B., Roberts, F.S. (1982), Double Semiorders and Double Indifference Graphs, *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods* 3, 566-583.
- [15] Doignon, J.-P. (1987), Threshold Representations of Multiple Semiorders, *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods* 8, 77-84.
- [16] Dyer, J.S., Lorber, H.W. (1982), The multiattribute evaluation of program-planning contractors, *OMEGA* 10, 673-678.
- [17] Dyer, J.S., Sarin, R.K. (1979), Measurable multiattribute value functions, *Ops. Res.* 27, 810-822.
- [18] Edwards, W. (1977), Use of multiattribute utility measurement for social decision making, em D.E. Bell, R.L. Keeney, H. Raiffa (eds.), *Conflicting Objectives in Decisions*, John Wiley, 247-276.
- [19] Edwards, W., Newman, J.R. (1982), *Multiattribute Evaluation*, Sage.
- [20] Edwards, W., von Winterfeldt, D., Moody, D.L. (1988), Simplicity in decision analysis: an example and a discussion, em D.E. Bell, H. Raiffa, A. Tversky (eds.), *Decision Making: Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*, Cambridge University Press, 443-464.
- [21] Farquhar, P.H., Keller, L.R. (1989), Preference intensity measurement, em P.C. Fishburn and I.H. LaValle (eds.), *Choice under Uncertainty*, J.C. Baltzer AG, 205-217.
- [22] Fishburn, P.C. (1967), Methods of estimating additive utilities, *Mgmt. Sci.* 13, 435-453.
- [23] Fishburn, P.C. (1970), *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley.
- [24] Freeling, A.N.S. (1983), *Belief and decision aiding*, Tese de Doutorado, University of Cambridge.
- [25] French, S. (1988), *Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*, Ellis Horwood Limited.
- [26] Frisch, R. (1926), "Sur un problème d'économie pure", *Norsk Matematisk Forenings Skrifter Serie 1*, 16 1-40. Traduzido para Inglês por J.S. Chipman (1971), *On a problem in Pure Economics*, em J.S. Chipman, L. Hurwicz, M.K. Richter, H.F. Sonnenschein (eds.) *Preferences, Utility, and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, 386-423.
- [27] Goodwin, P., Wright, G. (1991), *Decision Analysis for Management Judgement*, John Wiley.
- [28] Guilford, J.P. (1954), *Psychometric Methods (Second Edition)*, Tata McGraw-Hill (First Edition, 1936, McGraw-Hill).
- [29] Keeney, R.L. (1992), *Value-Focused Thinking: A Path to Creative Decisionmaking*, Harvard University Press.
- [30] Keeney, R.L., Raiffa, H. (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley.
- [31] Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P., Tversky, A. (1971), *Foundations of Measurement, Vol.1*, Academic Press.
- [32] Lootsma, F.A. (1993), Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 2, 87-110.
- [33] Machina, M.J. (1981), 'Rational' decision making versus 'rational' decision modelling?, *J. Math. Psychol.* 24, 163-175.
- [34] McCord, M., de Neufville, R. (1983), Empirical demonstration that expected utility decision analysis is not operational, em B.P. Stigum, F. Wenstøp (eds.), *Foundations of Utility and Risk Theory with Applications*, Reidel, 181-199.
- [35] Miller, G.A. (1956), The magic number seven plus or minus two: some limits on the capacity for processing information, *Psych. Rev.* 63, 81-97.
- [36] Pareto, V. (1906), *Manuale di Economia Politica, con una Introduzione alla Scienza Sociale*, Societa Editrice Libreria, Milan. (Em Francês: *Manuel d'Economie Politique*, Marcel Giard, 2ème édition, 1927. Em Inglês: *Manual of Political Economy*, Kelley).
- [37] Rescher, N. (1969), *Introduction to Value Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [38] Roberts, F.S. (1979), *Measurement Theory with Applications to Decision-making, Utility and the Social Sciences*, Addison-Wesley.
- [39] Rosenhead, J. (ed.) (1989), *Rational Analysis for a Problematic World*, John Wiley.
- [40] Roy, B. (1985), *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Economica.
- [41] Roy, B. (1990), The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, em [Bana e Costa, 1990], 155-183.
- [42] Roy, B., Bouyssou, D. (1993), *Aide Multicritère à la Décision: Méthodes et Cas*, Economica.
- [43] Roy, B., Vincke, Ph. (1984), Relational systems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results, *Mgmt. Sci.* 30, 1323-1335.

- [44] Roy, B., Vincke, P. (1987), Pseudo-orders: Definition, Properties and Numerical Representation, *Mathematical Social Sciences* 14, 263-274.
- [45] Saaty, T.L. (1977), A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology* 15, 234-281.
- [46] Saaty, T.L. (1980), *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill.
- [47] Sarin, R.K. (1983), Measurable value function theory :survey and open problems, em P. Hansen (ed.), *Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making*, Springer-Verlag, 337-346.
- [48] Stevens, S.S. (1946), On the theory of scales of measurement, *Science* 103, 677-680.
- [49] Tomlinson, R., Kiss, I. (eds.) (1984), *Rethinking the Process of Operational Research and Systems Analysis*, Pergamon Press.
- [50] Torgerson, W.S. (1958), *Theory and Methods of Scaling*, John Wiley (reprint edition, 1985).-
- [51] White, D.J. (1985), *Operational Research*, John Wiley.
- [52] Von Winterfeldt, D., Edwards, W. (1986), *Decision Analysis and Behavioral Research*, Cambridge University Press.
- [53] Vansnick, J.-C. (1984), Strength of preference - theoretical and practical aspects, em J.-P. Brans (ed.), *Operational Research'84*, North-Holland, 449-463.